DM de mathématiques n°8 - correction

Exercice 1 :

On considère l'expression A, dont une écriture est la suivante : $A = (x-3)^2 + (x-3)(x+3)$

1) $A = (x-3)^2 + (x-3)(x+3)$
$= x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 + x^2 - 3^2$
$= 2x^2 - 6x$
2) $A = 2x^2 - 6x = 2x \times x - 2x \times 3 = 2x(x-3)$
3) Pour $x = 5$, $A = 2x^2 - 6x = 2 \times 5^2 - 6 \times 5 = 2 \times 25 - 30 = 50 - 30 = 20$
4) Comme un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul, alors $x(x-3) = 0$ lorsque :

$x = 0$ Ou $x - 3 = 0$

$x = 0$ Ou $x = 3$

Bilan : les solutions de cette équation sont 0 et 3

Exercice 2 :

On considère l'expression $B = (2-5x)(3x+7) - (4-25x^2)$

1) $B = (2 \times 3x + 2 \times 7 - 5x \times 3x - 5x \times 7) - (4 - 25x^2)$
$B = 6x + 14 - 15x^2 - 35x - 4 + 25x^2$
$B = 10x^2 - 29x + 10$
2) $4 - 25x^2 = 2^2 - (5x)^2 = (2-5x)(2+5x)$
3) $B = (2-5x)(3x+7) - (4-25x^2)$
$B = (2-5x)(3x+7) - (2-5x)(2+5x)$
$B = (2-5x)[(3x+7) - (2+5x)]$
$B = (2-5x)(3x+7-2-5x)$
$B = (2-5x)(5-2x)$
4) Comme un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul, alors $(2-5x)(5-2x) = 0$ lorsque :

$2 - 5x = 0$ Ou $5 - 2x = 0$

$-5x = -2$ Ou $-2x = -5$

$x = {}^{2}/_{5}$ Ou $x = {}^{5}/_{2}$

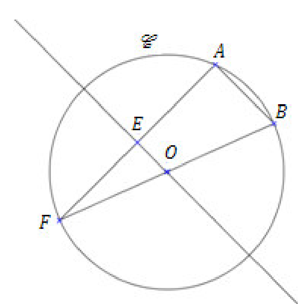
Bilan : les solutions de cette équation sont ${}^{2}/_{5}$ et ${}^{5}/_{2}$

5) Pour $x = 0$, $B = 10x^2 - 29x + 10 = 10 \times 0 - 29 \times 0 + 10 = 10$
Pour $x = -\frac{1}{2}$, $B = 10x^2 - 29x + 10 = 10 \times \frac{1}{4} - 29 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 10 = \frac{10}{4} + \frac{29}{2} + 10$
$B = \frac{10}{4} + \frac{58}{4} + \frac{40}{4} = \frac{108}{4} = 27$

Exercice 3 :

1) $1183 = 455 \times 2 + 273$
$455 = 273 \times 1 + 182$
$273 = 182 \times 1 + 91$
$182 = 91 \times 2 + 0$
Comme le $PGCD$ est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide, on a :
$PGCD\ (1183\ ;\ 455) = 91$
2) Lorsqu'on simplifie une fraction par le PGCD du numérateur et du dénominateur, on obtient une fraction irréductible. Ainsi, dans notre exemple, il faut simplifier par 91.
$\frac{1\,183}{455} = \frac{1\,183 \div 91}{455 \div 91} = \frac{13}{5}$

Exercice 4 :



- $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de diamètre $BF = 40\ mm$.
- A est un point du cercle $\mathscr{C}$ tel que $AB = 14\ mm$.
- La perpendiculaire à la droite (AF) passant par O coupe le segment $[AF]$ en E

1) Comme le point $A \in \mathscr{C}$ et que $[BF]$ est un diamètre de ce cercle alors le triangle ABF est rectangle en A. (Car si l'on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre de ce cercle, alors on obtient un triangle rectangle.

2) Dans le triangle AFB rectangle en A,

$$Sin\ (\ \widehat{AFB}\ ) = \frac{AB}{FB}$$

$$Sin\ (\ \widehat{AFB}\ ) = \frac{14}{40}$$

Et donc, en utilisant la calculatrice, $\widehat{AFB} \approx 20{,}5°$

3) Dans le triangle EOF rectangle en E,

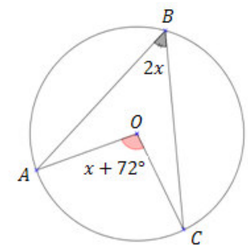
$$Cos\ (\ \widehat{EFO}\ ) = \frac{EF}{OF}$$

$$Cos\ (\ 20{,}5\ ) \approx \frac{EF}{20}$$

Et donc $EF\ \approx 20\ \times Cos\ (\ 20{,}5\ ) \approx 19\ mm$

Exercice 5 :

Soit un cercle de centre O et A, B, C trois points de ce cercle placés comme sur la figure ci-contre.



Si, dans un cercle, un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc alors l'angle au centre mesure le double de l'angle inscrit.

Ici, $\widehat{AOC} = 2 \times \widehat{ABC}$

Ce qui donne $x + 72° = 2 \times 2x$

Soit $x + 72° = 4x$

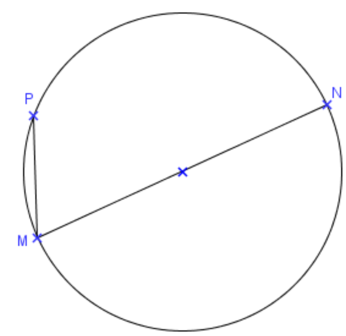
On cherche alors la valeur de x :

L'équation est équivalente à $3x = 72$, soit $x = 24$

Bilan : on trouve que $\widehat{AOC} = x + 72 = 24 + 72 = 96°$ et $\widehat{ABC} = 2x = 2 \times 24 = 48°$

Exercice 6 :

1) Voir ci-contre.



2) Si l'on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre de ce cercle, alors on obtient un triangle rectangle.
Bilan : le triangle MNP est rectangle en P ici.
3) Dans le triangle MNP est rectangle en P, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$MN^2 = MP^2 + PN^2$$
$$5{,}2^2 = 2^2 + PN^2$$

Donc :

$$PN^2 = 5{,}2^2 - 2^2 = 23{,}04$$

Soit $PN = \ \sqrt{23{,}04} = 4{,}8\ cm$

4) a. Dans le triangle MNP est rectangle en P, $Cos\ \left(\ \widehat{NMP}\ \right) = \frac{MP}{MN} = \frac{2}{5{,}2}$

b. En utilisant la calculatrice, on trouve que $\widehat{NMP} \approx 67°$

Exercice 7 :

1) Dans le triangle MNP rectangle en P, $Sin\ \left(\ \widehat{MNP}\ \right) = \frac{MP}{MN} = \frac{5}{7}$
Et donc, utilisant la calculatrice, $\widehat{MNP} \approx 46°$
2) Dans le triangle MNP rectangle en P, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$MN^2 = NP^2 + PM^2$$
$$7^2 = NP^2 + 5^2$$
$$NP^2 = 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$$

Et donc, $NP = \sqrt{24} \approx 4{,}9\ cm$

3) Comme
   - $(\ IJ\ ) \mathbin{//} (\ MN\ )$
   - P, I, M alignés
   - P, J, N alignés

Alors d'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{PI}{PM} = \frac{JI}{MN}$; soit $\frac{2}{5} = \frac{JI}{7}$

Donc $IJ = \frac{2 \times 7}{5} = 2{,}8\ cm$